

การวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดในระบบสื่อสารไร้สาย แบบแมสซีฟเอ็มไอเอ็มโอซึ่งใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ Zero Forcing

Bit Error Probability Analysis for Massive MIMO Wireless Communications utilizing Zero Forcing Precoding

ดิศพล ชำนาญกุล

Ditsapon Chumchewkul

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ พื้นที่สาละยา

Department of Telecommunication Engineering, Faculty of Engineering,
Rajamangala University of Technology Rattanakosin, Salaya campus, Thailand

Corresponding Author E-mail: ditsapon.chu@rmutr.ac.th

Received: 1/3/26, Revised: 21/4/26, Accepted: 22/4 /26

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาด (Bit error probability หรือ BEP) ของระบบสื่อสารไร้สายแบบ Massive Multiple-Input, Multiple-Output (M-MIMO) ซึ่งใช้พรีโค้ดดิ้ง (Precoding) แบบ Zero forcing ภายใต้ช่องสัญญาณแบบ Frequency-flat fading channel ผู้วิจัยใช้อนุกรมของนิวแมนอันดับที่หนึ่ง (The first-order Neumann series) เพื่อวิเคราะห์สมการรูปแบบปิด (Closed-form equation) ของตัวแปรควบคุมกำลังงานเฉลี่ย (Normalization factor) สำหรับระบบสื่อสารและพิสูจน์ว่าฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability distribution function หรือ PDF) ของสัญญาณรบกวนขาออกของภาครับมีลักษณะใกล้เคียงการแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian distribution) นอกจากนี้ บทความนี้เสนอสมการแบบปิดสำหรับค่าความแปรปรวน (Variance) และนำ PDF ของสัญญาณรบกวนขาออกของภาครับมาใช้วิเคราะห์ความน่าจะเป็นในการเกิดบิตผิดพลาดสำหรับระบบสื่อสารซึ่งใช้การมอดูเลตแบบ B/QPSK (Binary/Quadrature phase shift keying) และแบบ M -QAM (M -ary Quadrature amplitude modulation) ร่วมกับรหัสเกรย์ (Gray-coded mapping) นอกจากนี้ ผู้วิจัยเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ BEP ด้วยสมการที่นำเสนอกับผลการทดสอบด้วยโปรแกรมจำลองระบบสื่อสาร ผลลัพธ์จากการทดลองกล่าวแสดงให้เห็นว่า BEP จากสมการที่นำเสนอมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงอย่างเห็นได้ชัด สำหรับระบบสื่อสารที่มีจำนวนสายอากาศของสถานีฐาน 512 ต้น มีจำนวนผู้ใช้งาน 20 คน และใช้การมอดูเลตแบบ 16-QAM ผลการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดด้วยสมการที่นำเสนอในกรณีนี้ที่ E_b/N_0 เท่ากับ -5 dB มีค่าเป็น 4×10^{-3} ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนจากค่าจริงเพียงแค่ 4.78×10^{-6} ดังนั้นสมการที่นำเสนอในบทความนี้จึงสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อการวิเคราะห์ระบบสื่อสารไร้สายแบบ M-MIMO ได้อย่างแม่นยำ

คำสำคัญ: ระบบสื่อสารแบบ Massive Multiple-Input, Multiple-Output พรีโค้ดดิ้งแบบ Zero forcing ช่องสื่อสารแบบ Rayleigh fading

Abstract

This article derives bit error probability (BEP) for massive multiple-input, multiple-output (M-MIMO) wireless communication, utilizing zero-forcing precoding. Frequency-flat fading channel is focused on this research work. The author utilizes the first-order Neumann series to analyze a closed-form expression for the normalization factor of the M-MIMO system, and proves that the probability distribution function (PDF) for the effective noise approaches the Gaussian distribution. A closed-form expression for the variance is additionally analyzed, and the derived PDF is then chosen to analyze the BEP for the M-MIMO system, utilizing B/QPSK (Binary/Quadrature phase shift keying) and M -QAM (M -ary Quadrature amplitude modulation), with Gray-coded mapping. The analytical results are validated through Monte-Carlo simulation, and the empirical results confirmed that the derived BEP significantly matched the exact results. Focusing on a system with 512 transmit antennas and 20 users, the derived BEP for 16-QAM at $E_b/N_0 = -5$ dB was 4×10^{-3} , and the deviation between the analysis and the exact BEP was only 4.78×10^{-6} . Thus, the proposed BEP analysis can be utilized for analyzing performance of M-MIMO system efficiently.

Keywords: Massive Multiple-Input, Multiple-Output, Zero forcing precoding and Rayleigh fading channel

1. บทนำ

ระบบสื่อสารไร้สายแบบ Massive Multiple-Input Multiple-Output (M-MIMO) เป็นหนึ่งในวิธีการปรับปรุงประสิทธิภาพในการใช้งานพลังงานและลดการรบกวนในระบบสื่อสารไร้สายโดยใช้สายอากาศภาคส่งและรับจำนวนมากว่าหนึ่งชุดเพื่อการรับและส่งข้อมูลพร้อมกัน ระบบสื่อสารแบบ M-MIMO เป็นหนึ่งในทางเลือกสำหรับการเพิ่มประสิทธิภาพในการใช้งานช่องสัญญาณและพลังงาน (Spectral and energy efficiency) ของระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่ยุคที่ 6 [1] สำหรับการสื่อสารส่วนควาน์ลิงก์ (Downlink) จากสถานีฐาน (Base station) ไปยังอุปกรณ์ของผู้ใช้งาน (User equipment) ของระบบสื่อสารแบบ M-MIMO สัญลักษณ์ (Symbol) จากภาคส่งถูกส่งออกจากสายอากาศทุกคันไปยังสายอากาศของอุปกรณ์ของผู้ใช้งานพร้อมกัน ดังนั้นระบบสื่อสารส่วนนี้จึงมีความจำเป็นในการใช้วิธีการพรีโค้ดดิ้ง (Precoding) เพื่อกำหนดสัญลักษณ์ของภาคส่งตามข้อมูล Channel state information (CSI) ของช่องสัญญาณเพื่อให้การส่งข่าวสารไปยังภาครับเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ [2]

สำหรับวิธีการพรีโค้ดดิ้งแบบ ZF (Zero forcing) จัดเป็นพรีโค้ดดิ้งแบบเชิงเส้น (Linear precoding) ชนิดหนึ่งซึ่งใช้ Pseudo-inverse ของเมทริกซ์แกรม (Gram matrix) เพื่อลดการรบกวนของสัญญาณจากสายอากาศอื่น ๆ ในช่องสื่อสาร พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF มักถูกเลือกใช้เป็นวิธีการหลักในการติดตั้งระบบสื่อสารเพื่อการใช้งานจริงเนื่องจากการทำงานของพรีโค้ดดิ้งชนิดนี้มีความซับซ้อนน้อยกว่าพรีโค้ดดิ้งแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear precoding) นอกจากนี้ ระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF ได้รับผลกระทบจากการรบกวนของสัญญาณจากผู้ใช้งานอื่นในระบบสื่อสารค่อนข้างน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับผลของสัญญาณรบกวน จึงส่งผลให้ประสิทธิภาพของระบบสื่อสารมีค่าเข้าใกล้ค่าที่ดีที่สุด [3] ดังนั้นงานวิจัยบางส่วนจึงมุ่งเน้นวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบสื่อสารไร้สายแบบ M-MIMO ที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF

จากการสำรวจวรรณกรรมงานวิจัยพบว่างานวิจัยบางให้ความสนใจกับการวิเคราะห์ SNR และ Achievable rate ของระบบสื่อสารที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF และแบบเชิงเส้นชนิดอื่น ใน พ.ศ.2556 F. Rusek และคณะ [4] นำเสนอสมการแบบปิด (Closed-form expression) สำหรับการประมาณค่า SNR และ Achievable rate ของระบบสื่อสารที่ใช้พรีโค้ดดิ้งและดีเทกเตอร์ (Detector) แบบเชิงเส้นของระบบสื่อสารที่ใช้สายอากาศจำนวนมาก [4] สำหรับการวิเคราะห์ Achievable rate ของระบบสื่อสารที่ได้รับผลกระทบจากการทำงานของภาคประมาณค่าช่องสื่อสาร (Channel estimation) ถูกนำเสนอใน [5] ต่อมาใน พ.ศ. 2559 การวิเคราะห์ Achievable rate ของระบบสื่อสารชนิด M-MIMO ซึ่งใช้พรีโค้ดดิ้งชนิด Regularized zero-forcing ภายใต้ช่องสื่อสารแบบ Spatially correlated MIMO Rician fading ถูกนำเสนอขึ้นโดย H. Falconet และคณะ [6]

สมการแบบปิดสำหรับประมาณค่า Ergodic channel rate ของระบบสื่อสารชนิดเดียวกันได้ถูกนำเสนอใน [7] โดยใช้หลักการของการขยายของเทเลอร์อันดับที่สาม (The 3rd Taylor expansion) ผู้วิจัยและคณะ [8] ใช้อนุกรมของนิวแมนอันดับที่หนึ่ง (The first-order Neumann series) เพื่อประมาณค่า Sum-rate ratio ค่า Achievable rate ของระบบสื่อสาร M-MIMO ที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF ภายใต้ช่องสัญญาณแบบ Rician fading ใน [9] ผลงานวิจัยดังกล่าวใช้ Eigenvalue moments ของ Inverse Wishart matrix เพื่อประมาณค่าช่องสัญญาณแบบ Rician fading และวิเคราะห์สมการแบบปิดสำหรับคำนวณค่า Achievable rate ของระบบสื่อสาร สมการแบบปิดของ Sum-rate สำหรับระบบสื่อสารแบบ Multi-cell M-MIMO ถูกวิเคราะห์ใน [10]

ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาด (Bit error probability หรือ BEP) เป็นหนึ่งในตัวแปรสำคัญซึ่งแสดงให้เห็นถึงสัดส่วนของจำนวนบิตข่าวสารที่เกิดความผิดพลาดต่อปริมาณข่าวสารทั้งหมดที่ส่งผ่านระบบสื่อสาร ดังนั้นงานวิจัยบางส่วนจึงมุ่งเน้นวิเคราะห์ BEP ของระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF ภายใต้ช่องสื่อสารรูปแบบต่าง ๆ ใน พ.ศ.2552 ขอบเขต (Bound) ของค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดของระบบสื่อสารที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบเชิงเส้นในช่องสื่อสารแบบ Rayleigh และ Rician fading ได้ถูกนำเสนอใน [11] ต่อมาผู้วิจัยและคณะ [12] วิเคราะห์ SNR ในกรณีที่ส่งข้อมูลผ่านช่องสื่อสารแบบ Rayleigh fading และใช้ผลการวิเคราะห์เพื่อคำนวณค่า Spectrum efficiency และ BEP ใน พ.ศ. 2562 ผู้วิจัยและคณะ [13] ใช้ทฤษฎีของ Bussgangs เพื่อวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดของระบบสื่อสารที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบเชิงเส้นในระบบสื่อสารที่มีการมอดูเลตแบบ QPSK

จากการสำรวจวรรณกรรมงานวิจัยข้างต้น พบว่างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ BEP สำหรับระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ซึ่งใช้หลักการพรีโค้ดดิ้งแบบ ZF ส่วนใหญ่กำหนดให้สัญญาณรบกวนขาออกของระบบมีลักษณะการแจกแจงเป็นแบบเกาส์ ต่อจากนั้นจึงนำผลการวิเคราะห์ SNR ของระบบสื่อสารมาใช้ร่วมกับสันนิษฐานดังกล่าวเพื่อวิเคราะห์ค่า BEP ถึงแม้ว่าผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ดังกล่าวมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริง การวิเคราะห์ดังกล่าวยังคงมิได้นำ PDF ของสัญญาณรบกวนขาออกของระบบมาวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดโดยตรง การพิสูจน์สมการแบบปิดสำหรับอธิบายคุณลักษณะของสัญญาณรบกวนขาออกของระบบสื่อสารที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF จึงมีโอกาสนในการเพิ่มความแม่นยำให้กับการวิเคราะห์ BEP ได้ เหนืออื่นใด ถึงแม้ว่าบทความส่วนใหญ่ใช้การแจกแจงแบบเกาส์เพื่อประมาณค่าการแจกแจงของสัญญาณรบกวนขาออกของระบบ ผู้วิจัยยังไม่พบผลงานวิจัยใดพิสูจน์สมการแบบปิดสำหรับคำนวณค่าความแปรปรวน (Variance) ของ PDF

ดังกล่าวซึ่งสามารถใช้เพื่อลดความซับซ้อนในการวิเคราะห์ระบบสื่อสารได้เป็นอย่างมาก

จากสาเหตุข้างต้น บทความนี้จึงนำเสนอการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดของระบบสื่อสารไร้สายแบบ M-MIMO ซึ่งใช้ฟรีโคดคิงแบบ ZF ภายใต้ช่องสัญญาณแบบ Frequency-flat fading โดยการนำอนุกรมของนิวแมนอันดับที่หนึ่งใน [14] มาใช้วิเคราะห์สมการแบบปิดของแฟกเตอร์ตัวคูณความน่าจะเป็นเฉลี่ยของสัญญาณขาออกของภาคฟรีโคดเคอร์ และนำเสนอการดังกล่าวมาใช้เพื่อวิเคราะห์ผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่มีต่อสัญญาณขาออกของภาครับ ในบทความนี้ผู้วิจัยพิสูจน์ให้เห็นว่าฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability distribution function หรือ PDF) ของสัญญาณรบกวนขาออกของระบบสื่อสารที่ใช้ฟรีโคดคิงแบบ ZF มีลักษณะใกล้เคียงการแจกแจงแบบเกาส์ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ (Zero-means, Gaussian distribution) และได้วิเคราะห์สมการแบบปิดเพื่อคำนวณความแปรปรวน (Variance) ของ PDF ดังกล่าวนอกจากนั้น ผู้วิจัยนำ PDF จากการวิเคราะห์ผลกระทบของสัญญาณรบกวนมาใช้ในการคำนวณความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดระบบสื่อสารที่ใช้การมอดูเลต (Modulation) แบบ B/QPSK (Binary/Quadrature phase shift keying) และ M -QAM (M -ary Quadrature amplitude modulation) ผู้วิจัยใช้แบบจำลองชนิด Uncorrelated M-MIMO และใช้ตัวแปรสุ่มประเภทจำนวนเชิงซ้อนที่มีการแจกแจงแบบเกาส์ (Complex-valued, Gaussian random variable) เพื่อจำลองช่องสื่อสารระหว่างสายอากาศภาคส่งและรับเนื่องจากเป็นแบบจำลองที่นิยมใช้สำหรับการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบสื่อสาร [15] ผลกระทบจากความสัมพันธ์ (Correlation) ระหว่างสายอากาศแต่ละคู่และความคิดพลาดของ CSI จากภาคประมาณค่าช่องสื่อสาร (Channel estimator) ไม่ได้นำมาพิจารณาในผลงานวิจัยนี้เพื่อลดความซับซ้อนในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบสื่อสาร

ในหัวข้อถัดไป กล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบสื่อสารไร้สายแบบ M-MIMO ที่ใช้หลักการฟรีโคดคิงแบบ ZF ผู้วิจัยได้ประมาณค่ากำลังงานเฉลี่ยของสัญญาณขาออกของภาคฟรีโคดเคอร์และคำนวณค่าคงที่สำหรับควบคุมกำลังงานเฉลี่ยของภาคส่ง ผลของการวิเคราะห์ดังกล่าวถูกสรุปไว้ในหัวข้อที่ 3 สำหรับหัวข้อ 4 และ 5 เป็นการสรุปผลการวิเคราะห์ PDF ของสัญญาณรบกวนและ BEP สำหรับระบบสื่อสารที่ส่งข้อมูลด้วยสัญญาณแบบ BPSK QPSK และ M -QAM ผลลัพธ์จากสมการที่นำเสนอในบทความนี้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่าจริงจากโปรแกรมจำลองระบบสื่อสาร ผลการทดสอบเหล่านี้ถูกบรรยายไว้ในหัวข้อที่ 6

2. แบบจำลองระบบสื่อสารไร้สายแบบ M-MIMO

ระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ที่ถูกนำมาพิจารณาในบทความนี้เป็นระบบสื่อสารส่วน Down-link สำหรับการส่งข้อมูลจากสถานีฐานไปยังเครื่องรับของผู้ใช้งานจำนวน N_u ชุด จำนวนสายอากาศภาคส่งของสถานี

ฐานมีจำนวนเป็น N_t และภาครับของผู้ใช้งานปลายทางใช้สายอากาศจำนวนหนึ่งชุดต่อหนึ่งภาครับโดยมีสัดส่วนของจำนวนสายอากาศของสถานีฐานมากกว่าจำนวนผู้ใช้งานค่อนข้างมาก ($N_t \gg N_u$) ช่องสัญญาณระหว่างสายอากาศภาคส่งและรับแต่ละชุดเป็นแบบ Frequency-flat fading channel [3] กำหนดให้ $h \in \mathbb{C}^{N_u \times N_t}$ เป็นเมทริกซ์ CSI ของช่องสัญญาณ โดยที่สมาชิก $h_{n,m}$ ใน h แสดงถึงช่องสื่อสารระหว่างสายอากาศของสถานีฐานชุดที่ m และผู้ใช้งานลำดับที่ n ในกรณีที่ช่องสื่อสารปราศจากการส่งข้อมูลโดยตรง (Direct link) ระหว่างสายอากาศภาคส่งและรับแต่ละชุด ค่าของ $h_{n,m}$ สามารถกำหนดขึ้นมาจากตัวแปรสุ่มประเภทจำนวนเชิงซ้อนที่มีการแจกแจงแบบเกาส์ (Complex-valued, Gaussian random variable) $CN(0, 2\sigma_h^2)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีความแปรปรวนเป็น σ_h^2 ในบทความนี้ผู้วิจัยกำหนดให้ σ_h^2 ของ $h_{n,m}$ มีค่าเป็น 0.5 เพื่อให้อัตราขยายของช่องสัญญาณระหว่างสายอากาศรับและส่งแต่ละชุดมีค่าเฉลี่ยเป็นหนึ่ง

กำหนดให้ตัวแปร $x \in \mathbb{C}^{N_u \times 1}$ แทนเวกเตอร์สัญลักษณ์ (Symbol vector) สำหรับผู้ใช้งานแต่ละชุดซึ่งมีสมาชิกเป็น $\{x_n\}_{n=1}^{N_u}$ ค่าของตัวแปรนี้ถูกสุ่มขึ้นมาจากกลุ่มของสัญลักษณ์ (Constellation points) ของ BPSK QPSK หรือ M -QAM โดยมีกำลังงานเฉลี่ยของ x เป็น E_s ภาคส่งกำหนดเมทริกซ์สัญลักษณ์ $s \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$ จาก x และ h ดังสมการที่ (1) [3]

$$s = \beta h^\dagger (h h^\dagger)^{-1} x \quad (1)$$

เมื่อ $h^\dagger$ และ $(h)^\dagger$ แทน Hermitian transpose และอินเวอร์ส (Inverse) ของเมทริกซ์ h ตามลำดับ สมาชิก $\{s_m\}_{m=1}^{N_t}$ แต่ละตัวใน s แทนสัญลักษณ์สำหรับส่งออกจากสายอากาศชุดที่ m ของสถานีฐาน ค่าคงที่ β ใน (1) คือแฟกเตอร์ตัวคูณ (Scaling factor) สำหรับการควบคุมให้กำลังงานเฉลี่ยของ s_m มีค่าเป็น E_s ซึ่งเท่ากับกำลังงานเฉลี่ยของ x_m

s ถูกส่งออกจากสายอากาศของภาคส่งไปยังภาครับผ่านทางช่องสัญญาณไร้สายแบบ M-MIMO หากกำหนดให้ $w \in \mathbb{C}^{N_u \times 1}$ แทนเวกเตอร์ของสัญญาณรบกวนแบบ Additive white Gaussian noise (AWGN) ซึ่งกำหนดมาจากตัวแปรสุ่มประเภทจำนวนเชิงซ้อนที่มีการแจกแจงแบบเกาส์ $CN(0, 2\sigma_w^2)$ เมทริกซ์สัญญาณภาครับ $y \in \mathbb{C}^{N_u \times 1}$ คำนวณได้ดังสมการที่ (2)

$$y = h s + w \quad (2)$$

ภาคส่งกำหนดสัญญาณ s_m เพื่อส่งสัญญาณด้วยสายอากาศจำนวน N_t ต้นโดยมีกำลังงานเฉลี่ยเป็น E_s ดังนั้นค่าความแปรปรวน σ_w^2 ของสมาชิกแต่ละตัวใน w จึงสามารถคำนวณได้จากค่า E_b/N_0 หรือ γ_b จากสมการที่ (3)

$$\sigma_w^2 = \frac{N_t E_s}{2 \log_2(M) \gamma_b} \quad (3)$$

เมื่อ M คือค่า Modulation index ซึ่งแสดงถึงจำนวนสมาชิกใน Constellation points สำหรับกำหนดสัญญาณ x_n เนื่องจากสัญลักษณ์ s_m

จากภาคส่งใน (1) ถูกคูณด้วยค่าคงที่ β สัญลักษณ์ $\hat{x}$ ณ ภาครับจึงมีความจำเป็นในการนอร์มอลไลซ์ด้วยสมการที่ (4) ต่อไปนี้เพื่อให้มีค่าเฉลี่ยของกำลังงานเท่ากับ x_n

$$\hat{x} = \frac{1}{\beta} y \quad (4)$$

3. การวิเคราะห์ผลกระทบจากสัญญาณรบกวน

หัวข้อที่ผ่านมานำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบสื่อสารไร้สายแบบ M-MIMO ซึ่งค่าคงที่ β ในสมการ (4) ทำหน้าที่ควบคุมกำลังงานเฉลี่ยของ s_m ให้อยู่ในระดับที่เหมาะสมกับการวิเคราะห์ระบบสื่อสาร สำหรับหัวข้อนี้ ผู้วิจัยใช้ออนุกรมของนิวแมนอันดับที่หนึ่งจาก [14] เพื่อวิเคราะห์สมการแบบปิดสำหรับค่า β เนื่องจากระบบสื่อสารแบบ M-MIMO นั้น N_t มีจำนวนมากกว่า N_u อย่างน้อยสิบเท่า เมทริกซ์แกรม $hh^\dagger$ จึงมีค่าใกล้เคียงกับเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal matrix) และอนุกรมของนิวแมนใน [14] จึงสามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อการประมาณค่า s_m ใน (1) ได้ในกรณีนี้ เมื่อนำการประมาณค่าอินเวอร์สเมทริกซ์ด้วยสมการ (7) ของ [14] มาใช้กับเมทริกซ์แกรมใน (1) โดยกำหนดให้ค่าคงที่อันดับ K ของอนุกรมของนิวแมนเป็น 1 ก็พบว่า เมทริกซ์ผกผัน (Inverse matrix) ของเมทริกซ์แกรม $hh^\dagger$ (5) สามารถประมาณค่าได้

$$(hh^\dagger)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1/g_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/g_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/g_{N_u N_u} \end{bmatrix} \quad (5)$$

เมื่อ $g_{m,m}$ คือสมาชิกตามแนวทแยงมุมของเมทริกซ์แกรมซึ่งกำหนดมาจากสมาชิกของ h ดังนี้

$$g_{mm} = \sum_{n=1}^{N_t} |h_{m,n}|^2 \quad (6)$$

ค่าของ g_{mm} ใน (6) เป็นจำนวนจริงโดยมี PDF เป็น Chi-square distribution เนื่องจากจำนวนของ N_t ในระบบสื่อสารแบบ M-MIMO มีค่ามากกว่า N_u อย่างน้อยสิบเท่า ขนาดของ g_{mm} จึงมีค่าเข้าสู่ค่าเฉลี่ย Δ ซึ่งมีค่าเป็น [16]

$$\Delta = 2N_t \sigma_h^2 \quad (7)$$

เมื่อแทนค่า Δ จาก (7) ในสมการที่ (6) (5) และ (1) ตามลำดับ จะพบว่าสมาชิกแต่ละตัวใน s สามารถจัดรูปแบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$s_m \approx \frac{\beta}{\Delta} \sum_{n=1}^{N_u} h_{n,m}^* x_n \quad (8)$$

เนื่องจาก s_m ใน (8) เกิดจากผลรวมของผลคูณระหว่าง $h_{n,m}^*$ และ x_n จำนวน N_u ครั้ง โดยที่ $\mathbb{E}\{\|h_{n,m}^*\|^2\}$ มีค่าเป็น 1 และ x_n มีพลังงานเฉลี่ยเป็น E_s ดังนั้นพลังงานเฉลี่ยของ s_m จึงมีค่าเป็น

$$\mathbb{E}\{\|s_i\|^2\} = \frac{\beta^2 N_u E_s}{\Delta^2} \quad (9)$$

ดังนั้นเพื่อให้ s_m มีค่าพลังงานเฉลี่ยเป็น E_s ค่าคงที่ β ใน (9) จึงถูกกำหนดให้มีค่าเป็น

$$\beta = \frac{\Delta}{\sqrt{N_u}} \quad (10)$$

ในบทความนี้ ผู้วิจัยใช้สมการของแฟคเตอร์ตัวคูณ β จาก (10) เพื่อควบคุมพลังงานเฉลี่ยของ s_m ในโปรแกรมจำลองระบบสื่อสารสำหรับการทดสอบ และใช้สมการ (10) เพื่อวิเคราะห์ผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่มีต่อสัญญาณขาออกของภาครับและ BEP ของระบบสื่อสารซึ่งจะถูกบรรยายในหัวข้อถัดไป

4. การวิเคราะห์ผลกระทบจากสัญญาณรบกวน

หัวข้อนี้นำเสนอการวิเคราะห์ผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่มีต่อ $\hat{x}$ ใน (4) หากแทนค่าของเมทริกซ์ s และ y จากสมการ (1) และ (2) ลงในสมการที่ (4) ตามลำดับก็จะได้ว่า

$$\hat{x} = x + \frac{1}{\beta} w = x + z \quad (11)$$

สมการที่ (11) แสดงให้เห็นว่าค่าของสัญลักษณ์ $\hat{x}$ ซึ่งเกิดจากการทำงานของภาครับมีความสัมพันธ์กับ x จากภาคส่ง ในขณะที่ $z \in \mathbb{C}^{N_u \times 1}$ ในเทอมที่สองของสมการที่ (11) แสดงถึงผลกระทบของสัญญาณรบกวน w ที่มีต่อ $\hat{x}$ นอกจากนั้น สมาชิกแต่ละตัวใน z เกิดจากผลหารระหว่าง w_n และค่าคงที่ β ซึ่งก็คือ

$$z_n = \frac{1}{\beta} w_n \quad (12)$$

z_n ใน (12) กำหนดมาจากผลหารระหว่างตัวแปรสุ่มแบบเกาส์ $CN(0, 2\sigma_w^2)$ และค่าคงที่ β ดังนั้น PDF ของ z_n จึงมีลักษณะเข้าสู่การแจกแจงแบบเกาส์เช่นเดียวกัน หากกำหนดให้ $\alpha(z_n)$ แทนองค์ประกอบในส่วน In-phase $\Re(z_n)$ หรือส่วน Quadrature $\Im(z_n)$ ของ z_n PDF ของ $\alpha(z_n)$ สามารถคำนวณได้ด้วยสมการ (5-8) ใน [17] ซึ่งก็คือ

$$p_z(\alpha(z_n)) = \beta p_w(\beta \alpha(z_n)) \quad (13)$$

เมื่อแทนค่า PDF ของ $\alpha(z_n)$ ใน (13) ด้วย $\mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$ จะได้ว่า PDF ขององค์ประกอบในส่วน In-phase และ Quadrature ของ z_n มีค่าเป็น

$$p_z(\alpha(z_n)) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2 N_u}} \exp\left(-\frac{\Delta^2 (z_n^I)^2}{2\sigma_w^2 N_u}\right) \quad (14)$$

สมการที่ (14) แสดงให้เห็นว่า PDF ของ $\alpha(z_n)$ มีการแจกแจงแบบเกาส์ $\mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีความแปรปรวน σ_z^2 เป็น $\sigma_w^2 N_u / \Delta^2$ เมื่อแทนค่า Δ จาก (7) ใน (14) จะได้ว่าค่าความแปรปรวนของ z_n สามารถคำนวณได้จาก

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_w^2 N_u}{4N_t^2 \sigma_h^4} \quad (15)$$

5. การวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาด

หัวข้อนี้เป็นการนำผลการวิเคราะห์ $p_z(\alpha(z_n))$ จาก (14) และค่าความแปรปรวน σ_z^2 ใน (15) มาใช้เพื่อคำนวณความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดของระบบสื่อสารที่ใช้การมอดูเลตแบบ B/QPSK และ M-QAM ในกรณีที่ใช้รหัสเกรย์ (Gray-coded mapping) เพื่อกำหนดสัญลักษณ์ที่ภาคส่ง หากกำหนดให้ระยะห่างระหว่างสัญลักษณ์ตามแนวแกน In-phase และ Quadrature ใน Constellation diagram มีค่าเป็น $2K$ ภาครับสามารถตัดสินใจเลือกสัญลักษณ์ที่ใกล้เคียงกับสัญลักษณ์ที่รับได้โดยใช้ Decision boundary ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างทั้งสองสัญลักษณ์ ดังนั้น Pairwise error probability (PEP) ของระบบสื่อสารจึงสามารถคำนวณได้จาก (5.2-4) ใน [18] ดังนี้

$$P(x \rightarrow \tilde{x}) = \int_0^\infty p_z(z_n^T + K) dz_n^T \quad (16)$$

หากแทนค่า $p_z(\alpha(z_n))$ จาก (14) ใน (16) ก็จะได้ว่า PEP สามารถจัดรูปแบบสมการได้เป็น

$$P(x \rightarrow \tilde{x}) = Q\left(\frac{K}{\sigma_z}\right) \quad (17)$$

เมื่อ $Q(\cdot)$ คือ Q-function ซึ่งมีนิยามดังสมการ (2.1-97) ใน [18] ดังนี้

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \quad (18)$$

บทความนี้นำ PEP จากสมการ (17) มาใช้วิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดในการสื่อสาร ในกรณีที่ระบบสื่อสารส่งข้อมูลด้วยสัญลักษณ์แบบ BPSK หรือ QPSK และใช้รหัสเกรย์เพื่อกำหนดสัญลักษณ์ BEP สามารถคำนวณได้โดยการแทนค่า PEP จาก (17) ลงใน (5.2-5) ของ [18] และได้ผลลัพธ์เป็น

$$P_e^{B/QPSK} = Q\left(\frac{K}{\sigma_z}\right) \quad (19)$$

เนื่องจากระบบสื่อสารที่ใช้สัญลักษณ์ M-QAM ร่วมกับรหัสเกรย์ การตรวจจับข้อมูลไบนารีสามารถตัดสินใจได้จาก $\Re(\tilde{x}_n)$ และ $\Im(\tilde{x}_n)$ ได้โดยเป็นถูกอิสระต่อกัน BEP ของระบบสื่อสารดังกล่าวจึงประมาณค่าได้จากสมการวิเคราะห์ความผิดพลาดสำหรับระบบสื่อสาร M_α -PAM (Pulse amplitude modulation) จาก (5.2-42) ใน [18] และจะได้

$$P_e^{M-QAM} \approx \frac{2(M_\alpha - 1)}{M_\alpha \log_2(M_\alpha)} P(x \rightarrow x') \quad (20)$$

ตัวแปร M_α ใน (20) แทนจำนวนสัญลักษณ์ใน Constellation diagram ตามแนวแกน In-phase และ Quadrature ซึ่งมีค่าเป็น 2 สำหรับ

ระบบสื่อสารที่ใช้การมอดูเลตแบบ BPSK และ QPSK สำหรับระบบสื่อสารส่งสัญลักษณ์แบบ 16-QAM จะได้ว่า M_α มีค่าเป็น 4 หากแทนค่า PEP จาก (17) ใน (20) จะได้ว่า BEP มีค่าเป็น

$$P_e^{16-QAM} \approx \frac{3}{4} Q\left(\frac{K}{\sigma_z}\right) \quad (21)$$

อย่างไรก็ตามการผลการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดใน (21) พิจารณาเฉพาะความผิดพลาดระหว่างสัญลักษณ์ข้างเคียงเท่านั้น ดังนั้นผลการวิเคราะห์อัตราบิตผิดพลาดใน (21) จึงยังคงมีความคลาดเคลื่อนโดยเฉพาะในกรณีที่ระบบสื่อสารมีค่า E_b/N_0 ไม่มากนัก

6. ผลการทดสอบ

ผลการวิเคราะห์ PDF ของ z_n ใน (14) ความแปรปรวน σ_z^2 ใน (15) และ BEP จาก (19) และ (21) ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากการทดสอบด้วยโปรแกรมจำลองระบบสื่อสารซึ่งพัฒนาขึ้นโดยใช้ภาษา C++ ร่วมกับไลบรารี Armadillo [19][20] และใช้ภาษาไพทอนร่วมกับโมดูล Numpy และ Matplotlib เพื่อการแสดงผลข้อมูล [21] เป็นการกำหนดตัวแปรสุ่มแบบยูนิฟอร์ม (Uniform random variable) เพื่อจำลองการกำเนิดสัญลักษณ์ x_m จากสมาชิกของ Constellation points และใช้ตัวแปรสุ่มแบบเกาส์เพื่อกำหนดค่าของสมาชิกในเมทริกซ์ h และ w มีการวนรอบในการทดสอบจำนวน 1×10^6 ครั้งเพื่อคำนวณค่าเฉลี่ยของ BEP ในขณะที่จำนวนรอบสำหรับการทดสอบ $p_z(\alpha(z_n))$ มีค่าลดลงเหลือเพียง 1×10^4 เนื่องจากข้อจำกัดทางด้านขนาดของตัวแปรชนิดอะเรย์ของภาษาคอมพิวเตอร์ ระบบสื่อสารไร้สายที่นำมาทดสอบในบทความนี้เป็นระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ซึ่งมีจำนวนสายอากาศภาคส่งมากกว่าจำนวนผู้ใช้งานอย่างน้อยสิบเท่า $N_t \gg N_u$ ช่องสื่อสารที่ทดสอบในบทความนี้เป็นแบบ Frequency-flat fading channel ดังรายละเอียดในหัวข้อที่ 2

รูปที่ 1 เป็นการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ PDF ของ $\Re(z_n)$ ด้วยสมการที่ (14) และค่าความแปรปรวนใน (15) กับค่า PDF จากการทดสอบในกรณีที่ระบบสื่อสารส่งสัญญาณด้วยสัญลักษณ์แบบ 16-QAM จำนวนของ N_u เท่ากับ 20 ในขณะที่ N_t มีค่าเป็น 128 256 และ 512 ระบบสื่อสารมีค่า E_b/N_0 เป็น 0 dB ผลการทดสอบนี้แสดงให้เห็นว่า $p_z(\alpha(z_n))$ ที่ได้จากสมการที่ (14) มีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์จากการจำลองระบบสื่อสารอย่างเห็นได้ชัด ในกรณีที่ N_t มีค่าเป็น 512 ค่า $p_z(\alpha(z_n))$ ณ ตำแหน่ง $\Re(z_n) = 0.5$ มีค่าเป็น 1.56×10^{-1} ในขณะที่ผลจากการทดสอบมีค่าเป็น 1.62×10^{-1} ดังนั้น $p_z(\alpha(z_n))$ จากการวิเคราะห์จึงมีค่ามากกว่าค่าจริง 4.05 %

ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบการวิเคราะห์ค่าความแปรปรวน σ_z^2 ของ $\Re(z_n)$ จาก (15) กับค่าจริงจากการทดสอบระบบสื่อสารที่ใช้การมอดูเลตแบบ 16-QAM ที่ E_b/N_0 เท่ากับ 0 dB จำนวนผู้ใช้งานมีค่าเป็น 5 10 และ 20 ในขณะที่ N_t มีค่าตั้งแต่ 20 ถึง 80 ชุด การทดสอบดังรายละเอียดข้างต้นได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 2 จากผลการทดสอบพบว่า σ_z^2 จากสมการ

(15) มีค่าใกล้เคียงค่าจริงจากโปรแกรมจำลองระบบสื่อสารโดยเฉพาะในระบบสื่อสารที่มีจำนวนสายอากาศภาคส่งมาก สำหรับระบบสื่อสารที่มี N_u เป็น 20 ผลการวิเคราะห์หาค่าความแปรปรวน ณ ตำแหน่ง N_t เท่ากับ 80 มีค่าเป็น 3.13×10^{-1} ซึ่งผลการวิเคราะห์นี้มีค่าคลาดเคลื่อนจากความแปรปรวนจริงเพียงแค่ 7.9×10^{-5} อย่างไรก็ตาม ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนที่ N_t เท่ากับ 20 มีค่าเป็น 1.25 และมีความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นเป็น 1.7×10^{-3} นอกจากนั้น ผลการวิเคราะห์ σ_z^2 นี้ยังแสดงให้เห็นว่าการลดจำนวน N_u ในระบบสื่อสารส่งผลให้ความแปรปรวนของ $\mathcal{R}(z_n)$ มีค่าลดลงได้อย่างเห็นได้ชัด การลดจำนวนผู้ใช้งานจาก 20 เป็น 5 ทำให้ σ_z^2 จากการวิเคราะห์ที่ N_t เท่ากับ 80 มีค่าลดลงเหลือเพียง 7.81×10^{-2}

นอกเหนือจากการประเมินความถูกต้องของสมการวิเคราะห์ $p_z(\alpha(z_n))$ แล้ว ผู้วิจัยยังได้ทดสอบผลการวิเคราะห์ BEP จากสมการที่ (19) สำหรับระบบสื่อสารที่ใช้สัญลักษณ์แบบ QPSK N_u มีค่าเป็น 20 และ N_t มีค่าเป็น 20 40 80 และ 160 ผลการวิเคราะห์ดังกล่าวถูกเปรียบเทียบกับค่าจริงของโปรแกรมจำลองระบบสื่อสารและได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 3 หากพิจารณา BEP ระบบสื่อสารที่มีค่า N_u และ N_t เป็น 20 และ 20 ตามลำดับก็จะพบว่าความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดจากการวิเคราะห์และค่าจริง ณ E_b/N_0 เท่ากับ 0 dB มีค่าเป็น 7.69×10^{-2} และ 7.70×10^{-2} ตามลำดับ ค่า BEP จากสมการที่นำเสนอ มีค่าน้อยกว่าค่าจริง 5.72×10^{-5} ดังนั้นผลการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดในสมการที่ (19) มีความสอดคล้องกับค่าจริงจากการทดสอบอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนั้นผลการทดสอบในรูปที่ 3 ยังแสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์ BEP ของระบบสื่อสารที่มีจำนวน N_t มากขึ้นจะมีความแม่นยำเพิ่มขึ้นเนื่องจากข้อดีของการประมาณค่าอินเวอร์สของเมทริกซ์แกรมใน (5) เพื่อลดความซับซ้อนของการวิเคราะห์ประสิทธิภาพระบบสื่อสารและการประมาณค่าดังกล่าวจะมีความแม่นยำมากขึ้นเมื่อ $N_t \gg N_u$ สำหรับระบบสื่อสารที่มีจำนวน N_t เป็น 160 ดังนั้นค่า BEP จริงจากการทดสอบที่ E_b/N_0 เป็น -5 dB มีค่าเป็น 1.20×10^{-2} ในขณะที่ผลการวิเคราะห์มีค่าแตกต่างจากค่าจริงเพียงแค่ 1.2×10^{-5} เหนืออื่นใด ผลการวิเคราะห์ BEP ในรูปที่ 2 ยังแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มจำนวนสายอากาศภาคส่งส่งผลให้ BEP มีค่าลดลงอย่างมีนัยสำคัญ ระบบสื่อสารที่ใช้ N_t เป็น 20 ต้นต้องการ E_b/N_0 อย่างน้อย 8.37 dB เพื่อรักษาระดับให้ BEP ของระบบมีค่าต่ำกว่า 1×10^{-4} ในขณะที่ระบบสื่อสารที่มีจำนวนสายอากาศภาคส่ง 160 ต้นต้องการ E_b/N_0 เพียงแค่ -0.67 dB เพื่อให้มีค่า BEP เท่ากัน

ในลักษณะเดียวกัน รูปที่ 4 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ BEP จากสมการที่ (21) กับผลการทดสอบระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ที่ใช้ภาค Symbol mapper แบบ 16-QAM ร่วมกับรหัสกราย จำนวนผู้ใช้งานเท่ากับ 20 และ N_t มีค่าเป็น 64 128 256 และ 512 ผลการทดสอบในรูปที่ 4 สามารถยืนยันได้ว่าผลการวิเคราะห์ BEP ของระบบสื่อสารแบบ 16-QAM ใน (21) ให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับค่าจริงจากโปรแกรมจำลอง

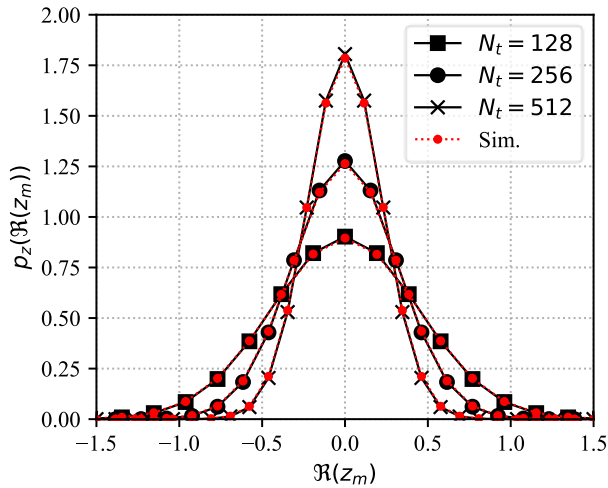
ระบบสื่อสาร ผลการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดในกรณีที่มีค่า N_t เป็น 512 ณ ตำแหน่ง BEP เป็น 1×10^{-4} พบว่าระบบต้องการ E_b/N_0 เป็น -1.90 dB ในขณะที่ค่า E_b/N_0 จากการทดสอบมีความแตกต่างจากผลการวิเคราะห์ 3.44×10^{-3} dB อย่างไรก็ตามผลการวิเคราะห์ BEP ในกรณีที่ระบบสื่อสารมีค่า E_b/N_0 ต่ำยังคงมีความคลาดเคลื่อนจากค่าจริงเพิ่มขึ้นเนื่องจากการวิเคราะห์ BEP สำหรับการมอดูเลตแบบ M-QAM ใน (21) พิจารณาความผิดพลาดซึ่งเกิดจากสัญลักษณ์ซึ่งอยู่ติดกับสัญลักษณ์ที่ถูกต้องเท่านั้น ผลการจำลอง BEP ของระบบสื่อสารที่ใช้ N_t เป็น 64 และมีค่า E_b/N_0 เป็น -9.6 dB มีค่าเท่ากับ 0.25 ในขณะที่การวิเคราะห์ได้ผลลัพธ์เป็น 0.22 ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนจากค่าจริงถึง 10.79%

7. บทสรุป

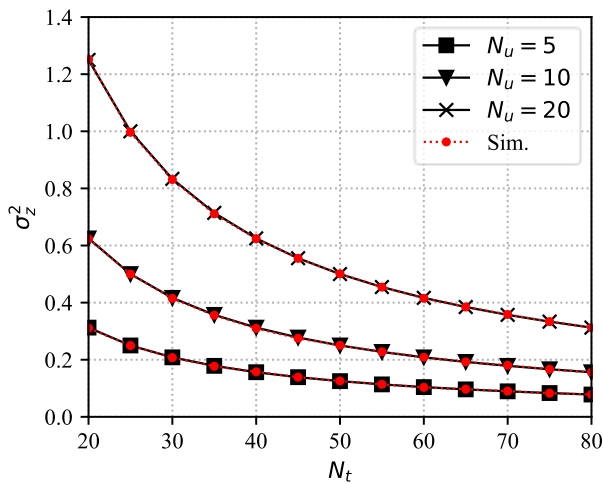
ในบทความนี้ผู้วิจัยนำอนุกรมของนิวมานอันดับที่หนึ่งมาใช้ลดความซับซ้อนในการวิเคราะห์ผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่มีต่อสัญญาณขาออกของภาครับในระบบสื่อสารไร้สายชนิด M-MIMO ที่ใช้พรีโค้ดดิ้งแบบ ZF ผู้วิจัยได้พิสูจน์ว่าฟังก์ชันแฉกความน่าจะเป็นของสัญญาณรบกวน ณ สัญญาณขาออกของระบบสื่อสารมีลักษณะคู่เข้าสู่การแจกแจงแบบเกาส์และได้วิเคราะห์สมการแบบปิดเพื่อคำนวณค่าความแปรปรวนของ PDF ดังกล่าว ผลการวิเคราะห์ PDF ของสัญญาณรบกวนถูกใช้เพื่อการคำนวณโอกาสในการเกิดบิตผิดพลาดของระบบสื่อสารที่ใช้การมอดูเลตแบบ BPSK QPSK และ M-QAM จากการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ระบบสื่อสารกับค่าจริงจากโปรแกรมจำลองระบบสื่อสารแสดงให้เห็นว่าสมการวิเคราะห์ BEP ที่นำเสนอให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำ ดังนั้นผลงานวิจัยนี้จึงสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ในด้านอื่น ๆ ได้ อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนั้น ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบสื่อสารแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มจำนวนสายอากาศภาคส่งในระบบสื่อสารแบบ M-MIMO ส่งผลให้ระบบสื่อสารมีความต้องการค่า E_b/N_0 ลดลงอย่างมีนัยสำคัญเพื่อควบคุมให้ความน่าจะเป็นของบิตผิดพลาดอยู่ในระดับที่เหมาะสม

อย่างไรก็ตาม ผลการวิเคราะห์ค่า BEP ของระบบสื่อสารที่ใช้การมอดูเลตแบบ 16-QAM ในสมการที่ (18) ยังคงพิจารณาเฉพาะความผิดพลาดที่เกิดจากสัญลักษณ์ข้างเคียงใน Constellation diagram เท่านั้น และผู้วิจัยใช้เมทริกซ์ทแยงมุมในสมการ (5) เพื่อประมาณค่าอินเวอร์สของเมทริกซ์แกรม ดังนั้นการวิเคราะห์ BEP ในระบบสื่อสารที่มีค่า E_b/N_0 หรืออัตราส่วนของ N_t/N_u น้อยเกินไปยังคงมีความคลาดเคลื่อนจากค่าจริงเพิ่มขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีอื่น ๆ เหนืออื่นใด สมการทั้งหมดที่นำเสนอในบทความนี้ได้รับการวิเคราะห์หามาสำหรับช่องสื่อสารชนิด Frequency-flat fading channel และไม่ครอบคลุมผลกระทบจากความสัมพันธ์ระหว่างสายอากาศแต่ละคู่และความผิดพลาดจากการทำงานของภาคประมาณค่าช่องสื่อสาร ดังนั้นการ

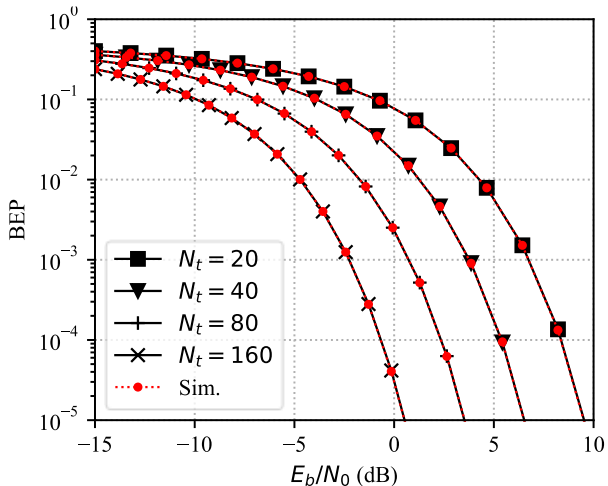
พัฒนาสมการวิเคราะห์ระบบสื่อสารโดยใช้แบบจำลองชนิดอื่น ๆ เพื่อลดความแตกต่างระหว่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และคณแบบภาคสนาม จึงยังคงมีความจำเป็นอย่างยิ่งในการค้นคว้าวิจัยในอนาคต



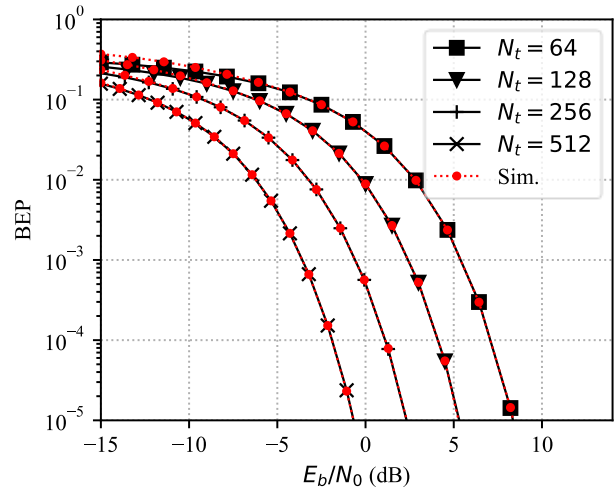
รูปที่ 1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ $\Re(z_n)$



รูปที่ 2 ผลการวิเคราะห์ค่าความแปรปรวน σ_z^2



รูปที่ 3 ผลการทดสอบ BER สำหรับระบบสื่อสารแบบ QPSK



รูปที่ 4 BER ในระบบสื่อสารที่ใช้การมอดูเลตแบบ 16-QAM

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนงบประมาณจากงบประมาณด้านวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2569 เพื่อสนับสนุนงานมูลฐานตามพันธกิจของหน่วยรับงบประมาณ (Fundamental Fund) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ รหัสโครงการวิจัย 219590 และผ่านการพิจารณาจริยธรรมการวิจัย เลขที่ 004/2026 ณ วันที่ 8 มกราคม 2569

เอกสารอ้างอิง

- [1] C. -X. Wang, *et al.*, "On the Road to 6G: Visions, Requirements, Key Technologies, and Testbeds," *IEEE Commun. Surv. Tut.*, vol. 25, no. 2, pp. 905-974, 2023.
- [2] N. Fatema, G. Hua, Y. Xiang, D. Peng and I. Natgunanathan, "Massive MIMO Linear Precoding: A Survey," *IEEE Syst. J.*, vol. 12, no. 4, pp. 3920-3931, 2018.
- [3] M. A. Albreem, A. H. A. Habbash, A. M. Abu-Hudrouss and S. S. Ikki, "Overview of Precoding Techniques for Massive MIMO," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 60764-60801, 2021.
- [4] F. Rusek *et al.*, "Scaling Up MIMO: Opportunities and Challenges with Very Large Arrays," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 30, no. 1, pp. 40-60, 2013.
- [5] J. Hoydis, S. T. Brink and M. Debbah, "Massive MIMO in the UL/DL of Cellular Networks: How Many Antennas Do We Need?," in *IEEE J. Sel. Areas in Commun.*, vol. 31, no. 2, pp. 160-171, 2013.
- [6] H. Falconet, L. Sanguinetti, A. Kammoun and M. Debbah, "Asymptotic Analysis of Downlink MISO Systems Over Rician Fading Channels," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics Speech Signal Process.*, pp. 3926-3930, 2016.

- [7] R. Yao, T. Li, Y. Liu, X. Zuo and H. Liu, "Analytical Approximation of the Channel Rate for Massive MIMO System With Large But Finite Number of Antennas," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 6496-6504, 2018.
- [8] C. Zhang, Y. Jing, Y. Huang and L. Yang, "Performance Analysis for Massive MIMO Downlink With Low Complexity Approximate Zero-Forcing Precoding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 66, no. 9, pp. 3848-3864, 2018.
- [9] J. K. N. Nyarko, J. Xie, R. Yao, Y. Wang and L. Wang, "Accurate Approximation of ZF Massive MIMO Channel Rate With a Finite Antenna Over Ricean Fading Channel," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 65803-65812, 2018.
- [10] Q. -U. -A. Nadeem and A. Chaaban, "Analysis of One-Bit Quantized Linear Precoding Schemes in Multi-Cell Massive MIMO Downlink," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 72, no. 5, pp. 2577-2594, 2024.
- [11] L. G. Ordóñez, D. P. Palomar, A. Pages-Zamora and J. Rodríguez Fonollosa, "Minimum BER Linear MIMO Transceivers With Adaptive Number of Substreams," in *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 6, pp. 2336-2353, 2009.
- [12] L. Zhao, K. Zheng, H. Long, H. Zhao, "Performance Analysis for Downlink Massive MIMO System With ZF Precoding", in *Proc. Trans. Emerging Telecom. Technol.*, 2013.
- [13] S. Jacobsson, G. Durisi, M. Coldrey and C. Studer, "Linear Precoding With Low-Resolution DACs for Massive MU-MIMO-OFDM Downlink," in *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 18, no. 3, pp. 1595-1609, 2019.
- [14] M. Wu, B. Yin, G. Wang, C. Dick, J. R. Cavallaro and C. Studer, "Large-Scale MIMO Detection for 3GPP LTE: Algorithms and FPGA Implementations," *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 916-929, 2014.
- [15] R. S. Kshetrimayum, *Fundamental of MIMO Wireless Communications*, Cambridge, UK: Cambridge university press, 2017.
- [16] D. Chumchewkul and C. C. Tsimenidis, "Closed-Form Bit Error Probability of ZF Detection for OFDM-M-MIMO Systems Using Effective Noise PDF," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 104384-104397, 2022.
- [17] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, London: McGraw-Hill, 4th ed., 2002.
- [18] J. G. Proakis, *Digital Communications*. New York, USA: McGraw-Hill, 4th ed., 2001.
- [19] The GCC team, "GCC, the GNU Compiler Collection." [Online]. Available: <https://gcc.gnu.org/>. [Accessed: Feb. 24, 2026].
- [20] C. Sanderson and R. Curtin, "Armadillo: An Efficient Framework for Numerical Linear Algebra," in *Proc. Int. Conf. Computer Autom. Eng.*, 2025.
- [21] Python software foundation, "Welcome to Python.org." [Online]. Available: <https://www.python.org>. [Accessed: Feb. 24, 2026].